PART3 曲線 $x=g(y)$ と y 軸の間の面積

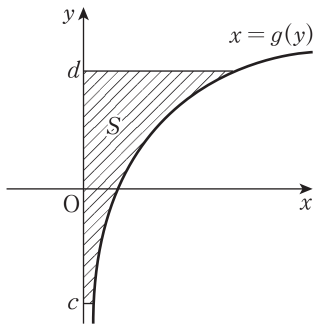
要点整理と公式

要点 ① 曲線 $x=g(y)$ と y 軸の間の面積

区間 $c \leqq y \leqq d$ で常に $g(y) \geqq 0$ のとき，曲線 $x=g(y)$ と y 軸および 2 直線 $y=c$, $y=d$ で囲まれた部分の面積 S は

$$S=\int_c^d g(y)dy$$

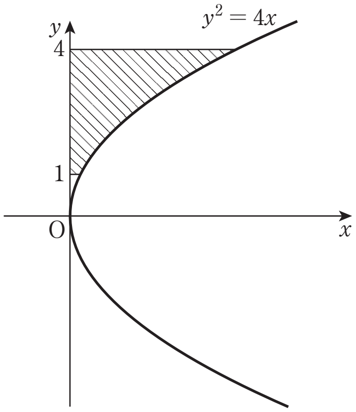
で表される。



(ex) 曲線 $y^2=4x$ と y 軸，2 直線 $y=1$，$y=4$ で囲まれた部分の面積 S を求める。

$y^2=4x$ より

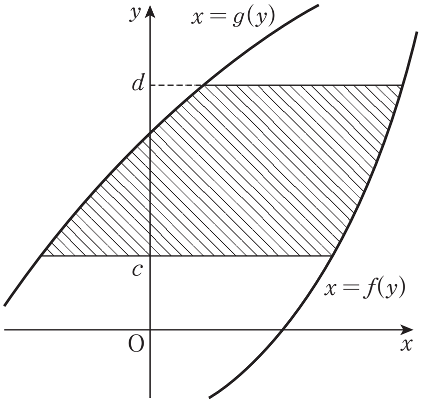
$$S=\int_1^4 \frac{1}{4}y^2\,dy=\left[\frac{1}{12}y^3\right]_1^4=\frac{21}{4}$$



区間 $c \leqq y \leqq d$ で常に $f(y) \geqq g(y)$ のとき，2 つの曲線 $x=f(y)$，$x=g(y)$ と 2 直線 $y=c$，$y=d$ で囲まれた部分の面積 S は

$$S=\int_c^d \{f(y)-g(y)\}dy$$

で表される。



[MEMO]

3　次の曲線や直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1)　$y=e^x$，$y=e$，$y=\dfrac{1}{e}$，y 軸

(2)　$y=\sqrt{x-1}$，$y=x-1$

Point Pickup

曲線と y 軸の間の面積

$c<d$ のとき，曲線 $x=g(y)$ と y 軸および 2 直線 $y=c$，$y=d$ で囲まれた部分の面積 S は

区間 $c \leqq y \leqq d$ で常に $g(y) \geqq 0$ のとき　$S=\displaystyle\int_c^d g(y)dy$

区間 $c \leqq y \leqq d$ で常に $g(y) \leqq 0$ のとき　$S=\displaystyle\int_c^d \{-g(y)\}dy=-\int_c^d g(y)dy$

区間 $c \leqq y \leqq d$ で常に $f(y) \geqq g(y)$ のとき，2 つの曲線 $x=f(y)$，$x=g(y)$ と 2 直線 $y=c$，$y=d$ で囲まれた部分の面積 S は

$$S=\int_c^d \{f(y)-g(y)\}dy$$

第20講 PART3 確認問題

1 曲線 $y=\log(x+1)$ と y 軸および 2 直線 $y=1$，$y=-1$ で囲まれた部分の面積を求めよ。 ア

答えは下の①～④のうちから選べ。

① $e+\dfrac{1}{e}$　　② $e+\dfrac{1}{e}-1$

③ $e-\dfrac{1}{e}+2$　　④ $e+\dfrac{1}{e}-2$

2 曲線 $y=\sqrt{x-2}$ と直線 $y=x-2$ で囲まれた部分の面積は $\dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}$ である。

PART3 曲線 $x=g(y)$ と y 軸の間の面積

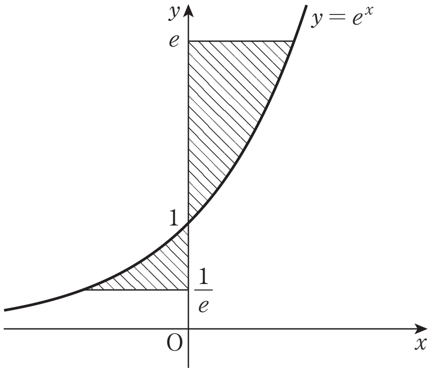
3 次の曲線や直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1) $y=e^x$，$y=e$，$y=\dfrac{1}{e}$，y 軸

(2) $y=\sqrt{x-1}$，$y=x-1$

[解答]

(1) 曲線 $y=e^x$ と y 軸の共有点の y 座標は $y=1$



$y=e^x$ より $x=\log y$

$\dfrac{1}{e}\leqq y\leqq 1$ においては $\log y\leqq 0$

$1\leqq y\leqq e$ においては $\log y\geqq 0$

$$S=-\int_{\frac{1}{e}}^{1}\log y\,dy+\int_{1}^{e}\log y\,dy$$

ここで $\displaystyle\int\log x\,dx=\int 1\cdot\log x\,dx$

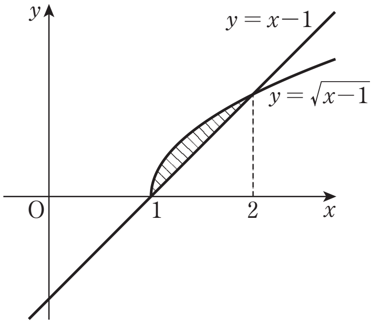
$$=x\log x-\int x\cdot\frac{1}{x}dx=x\log x-x+C \text{ より}$$

$$S=-[y\log y-y]_{\frac{1}{e}}^{1}+[y\log y-y]_{1}^{e}=-\left\{(0-1)-\left(-\frac{1}{e}-\frac{1}{e}\right)\right\}+\{(e-e)-(0-1)\}=2-\frac{2}{e}$$

(2) $\sqrt{x-1}=x-1$ より　$x-1=(x-1)^2$　$(x-1)(x-2)=0$

$x=1,\ 2$ (ともに $x\geqq 1$ を満たす)

よって，曲線 $y=\sqrt{x-1}$ と $y=x-1$ のグラフは右図



$$S=\int_1^2\{\sqrt{x-1}-(x-1)\}dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}(x-1)^2\right]_1^2$$

$$=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

(別解)

$y=\sqrt{x-1}\iff x-1=y^2\ (y\geqq 0)\iff x=y^2+1\ (y\geqq 0)$

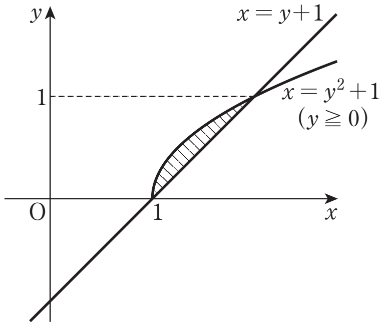
$y=x-1\iff x=y+1$

$y^2+1=y+1$ より $y^2-y=0$　　$y(y-1)=0$

$y=0,\ 1$　（ともに $y \geqq 0$ を満たす）

よって，曲線 $x=y^2+1$ $(y \geqq 0)$，$x=y+1$ の

グラフは右図



$$S=\int_0^1 \{(y+1)-(y^2+1)\}dy$$

$$=\int_0^1 (-y^2+y)dy$$

$$=\left[-\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{2}y^2\right]_0^1=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

第20講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：④

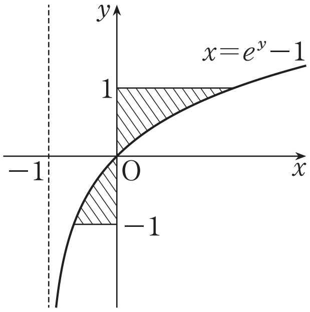
[解説]

曲線 $y=\log(x+1)$ と y 軸との共有点の y 座標は，$x=0$ より，

$$y=\log 1=0$$

$y=\log(x+1)$ より，$x+1=e^y$

$$x=e^y-1$$



$-1\leqq y\leqq 0$ においては，$e^y-1\leqq 0$

$0\leqq y\leqq 1$ においては，$e^y-1\geqq 0$

よって，求める面積は，

$$-\int_{-1}^{0}(e^y-1)dy+\int_{0}^{1}(e^y-1)dy \quad \text{[A]}$$

$$=-\left[e^y-y\right]_{-1}^{0}+\left[e^y-y\right]_{0}^{1}$$

$$=-\{1-(e^{-1}+1)\}+(e-1)-1$$

$$=\boldsymbol{e+\frac{1}{e}-2}$$

[A]　曲線と y 軸の間の面積
$c<d$ のとき，曲線 $x=g(y)$ と y 軸および2直線 $y=c$，$y=d$ で囲まれた部分の面積 S は，
区間 $c\leqq y\leqq d$ で常に $g(y)\geqq 0$ のとき，$S=\int_c^d g(y)dy$
区間 $c\leqq y\leqq d$ で常に $g(y)\leqq 0$ のとき，$S=-\int_c^d g(y)dy$

2　**[正解]** イ：1，ウ：6

[解説]

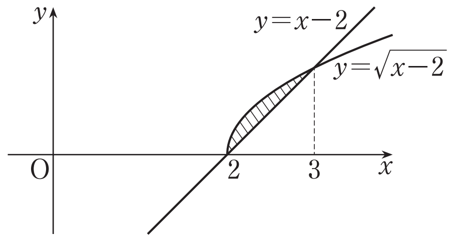
$\sqrt{x-2}=x-2$ より，

$$x-2=(x-2)^2$$

$$(x-2)(x-3)=0$$

$$x=2,\ 3\quad（ともに\ x\geqq 2\ を満たす）$$

よって，曲線 $y=\sqrt{x-2}$ と直線 $y=x-2$ のグラフは次の図のようになる。



求める面積は，

$$\int_2^3 \{\sqrt{x-2}-(x-2)\}dx$$ [B]

$$=\left[\frac{2}{3}(x-2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}(x-2)^2\right]_2^3$$

$$=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\mathbf{\frac{1}{6}}$$

[B]　$S=\int_a^b\{f(x)-g(x)\}dx$

（別解）

$$y=\sqrt{x-2}\iff x-2=y^2\quad(y\geqq 0)$$

$$\iff x=y^2+2\quad(y\geqq 0)$$

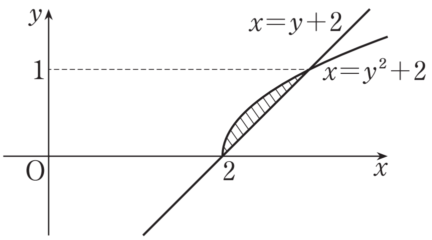
$$y=x-2\iff x=y+2$$

$y^2+2=y+2$ より，$y^2-y=0$

$$y(y-1)=0$$

$$y=0,\ 1$$

よって，曲線 $x=y^2+2\,(y\geqq 0)$，$x=y+2$ のグラフは，次の図のようになる。



求める面積は，

$$\int_0^1 \{(y+2)-(y^2+2)\}dy$$ [C]

$$=\int_0^1 (y-y^2)dy$$

$$=\left[\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{3}y^3\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\mathbf{\frac{1}{6}}$$

[C]　区間 $c \leqq y \leqq d$ で常に $f(y) \geqq g(y)$ のとき，2 つの曲線 $x=f(y)$，$x=g(y)$ と 2 直線 $y=c$，$y=d$ で囲まれた部分の面積 S は，

$$S=\int_c^d \{f(y)-g(y)\}dy$$